Kalkulačka rizikových kontaktů při větší akci

Martin Šmíd a BISOP

November 29, 2021

Předpokládejme, že na společenské akci potkám

- v očkovaých, kteří neprodělali nákazu
- n nočkovaných, kteří neprodělali nákazu
- m neočkovaných, co nákazu prodělali.

a se všemi budu mít rizikový kontakt. Moje ochrana proti nákaze je w (je rovno 0 pokud nejsem vakcinován ani jsem nemoc neprodělal, maximální možná ochrana je 1). Tento týden je incidence i případů na 100000. Naším cílem je určit pravděpodbonst, že se na akci nakazím.

Předpokládejme, že je v populaci procento μ procento očkovaných a procento ν těch, co infekci prodělali (předpokládáme že jich je mezi očkovanými relativně stejně jako mezi neočkovanými).

Nejprve určíme pravděpobnost p_n, že se během týdne nakazí náhodně vybraný neočkovaný: Pokud předpokládáme, že je hlášen pouze poměr α případů, pak je skutečná incidence

$$j = \frac{i}{\alpha},$$

Tato incidence je výsledkem nakažení očkovaných vnímavých, neočkovaných rekonvalescentů a neočkovaných neprodělavších (u očkovaných rekonvalescentů předpokládáme stoprocentní ochranu, což v praxi není daleko od pravdy), přičemž očkovaný se nakazí s prstí $(1-u)p_n$, kde u je průměrná účinnost vakcíny v daném čase v populaci očkovaných a rekonvalescent s prstí $(1-e)p_n$ kde e je průměrná ochrana získanou imunitou v populaci:

$$j = 100000(1-\nu)\mu p_v + 100000(1-\nu)(1-\mu)p_n + 100000\nu(1-\mu)p_r,$$
$$p_v = (1-u)p_n, \qquad p_r = (1-e)p_n$$

což dává

$$p_n = \frac{j}{100000[(1-\nu)\mu(1-u) + \nu(1-\mu)(1-e) + (1-\nu)(1-\mu)]}.$$

Pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba je nakažena, je samozřejmě

$$p = \frac{j}{100000}.$$

Pokud dále předpokládáme, že nakažení neočkovaní a rekonvalescenti jsou infekční f dnů, zatímco očkovaní g dnů, pak dostaneme následující hodnoty:

Kategorie	poměr	poměr infekčních daný den
	v populaci	v kategorii
očkovaní vnímaví (OV)	$\mu(1-\nu)$	$\gamma(1-u)p_n$
neočkovaní vnímaví (NV)	$(1-\mu)(1-\nu)$	ϕp_n
neočkovaní rekonvalescenti (NR)	$\nu(1-\mu)$	$\gamma(1-e)p_n$
očkovaní rekonvalescenti (OR)	$\nu\mu$	0

kde $\phi = \frac{f}{7}$ a $\gamma = \frac{g}{7}$.

Dále určeme podmíněnou pravděpodobnost q, že se člověk, který má ochranu jako já, nakazí při rizikovém kontaktu za podmínky, že je jeho protějšek v čase setkání infekční. Budeme přirozeně předpokládat, že pravděpodobnost jeho nákazy během týdne je rovna $\pi = (1-w)p_n$. Pokud budu dále předpokládat, že má za týden κ rizikových kontaktů, pak pravděpdobnost ω, že jeden určitý kontakt bude infekční, bude

$$\begin{aligned}
\omega = \P[&\text{kontakt je infekční}] \\
&= \P[\text{je infekční—protějšek je OV}]\P[\text{protějšek je OV}] \\
&+ \P[\text{je infekční—protějšek je NV}]\P[\text{protějšek je NV}] \\
&+ \P[\text{je infekční—protějšek NR}]\P[\text{protějšek NR}] \\
&+ \P[\text{je infekční—protějšek OR}]\P[\text{protějšek OR}] \\
= \gamma(1-u)p_n &\times \mu(1-\nu) + \phi p_n \times (1-\mu)(1-\nu) + \gamma(1-e)p_n \times \nu(1-\mu) + 0 \\
&= [\gamma(1-\nu)\mu(1-u) + (1-\nu)(1-\mu)\phi + \nu(1-\mu)(1-e)\gamma]p_n.
\end{aligned}$$

Pro výpočet q použijeme obvyklý trik s doplňkovou pravděpodobností:

$$\begin{aligned}
1-\pi = \P[\text{nenakazím se}] &= (\P[\text{nenakazím se—potkám } K \text{ infekčních}]) \\
= ((1-q)^K) = \sum_{k=1}^{\kappa}(1-q)^k\omega^k(1-\omega)^{\kappa-k}\binom{n}{k} &= [(1-q)\omega + (1-\omega)]^\kappa \\
&= (1-\omega q)^\kappa
\end{aligned}$$

což dává

$$q = \frac{1-(1-\pi)^{\frac{1}{\kappa}}}{\omega}.$$

Konečně můžeme přejít k naší společenské akci. Dle našich předpokladů je pravděpobonost, že se nakazím od daného očkovaného vnímavého, respektive neočkovaného vnímavého, respektive neočkovaného rekonvalescenta, rovna

$$r_v = q(1-u)\gamma p_n, \qquad r_n = q\phi p_n, \qquad r_m = q(1-e)\gamma p_n$$

takže pravěpodobnost, že se nakazím někoho z v očkovaných, n neočkovaných či m rekonvalescentů, je

$$r = 1 - (1 - r_v)^v (1 - r_n)^n (1 - r_m)^m.$$